

Document de Travail

Working Paper

2006-17

Estimation d'un modèle TIMA avec asymétrie contemporaine par inférence indirecte

Catheine BRUNEAU
Amine LAHIANI



UMR 7166 CNRS

Université Paris X-Nanterre
Maison Max Weber (bâtiments K et G)
200, Avenue de la République
92001 NANTERRE CEDEX

Tél et Fax : 33.(0)1.40.97.59.07
Email : secretariat-economix@u-paris10.fr



Université Paris X Nanterre

Estimation d'un Modèle TIMA avec Asymétrie Contemporaine par Inférence Indirecte

BRUNEAU Catherine⁺

LAHIANI Amine^{**}

⁺ * Laboratoire EconomiX

Université Paris 10 Nanterre

200 Avenue de la République 92001 Nanterre Cedex

* HEC Genève (Suisse)

November 20, 2006

Abstract

This paper implements a simulation-based method for estimating the parameters of Threshold Integrated Moving Average Models with contemporaneous asymmetry. Among many simulation-based methods we use the Indirect Inference method (II) with an autoregressive model as auxiliary model. To investigate the properties of the estimator in finite samples we refer to Monte Carlo methods. We apply our framework to the daily CAC40 index returns series and we find that this series exhibits an asymmetric response to shocks around a threshold.

Key words: Time series analysis; empirical p-value; threshold models; contemporaneous asymmetry

Résumé

Ce papier estime les paramètres d'un modèle moyenne mobile intégré à seuils avec asymétrie contemporaine. Parmi plusieurs méthodes simulées d'estimation on utilise la méthode d'inférence indirecte avec un modèle auxiliaire du type autoregressif. Pour évaluer les propriétés de l'estimateur II en échantillon fini, nous nous référons aux méthodes de simulation de Monte Carlo. L'application de notre méthodologie à la série des rendements journaliers de l'indice CAC40 montre que cette série révèle des réponses asymétriques aux chocs autour d'un seuil.

Mots clés: Séries temporelles; p-value empirique; modèles à seuils; asymétrie contemporaine.

*Nous remercions monsieur David Veredas, professeur à l'université libre de Bruxelles pour son assistance dans le travail empirique de cet article. Nous remercions également monsieur Olivier Scaillet, professeur à l'université de Genève pour ses remarques ainsi que les participants aux 23èmes journées Internationales d'Economie Monétaire et Bancaire, Lille 2006

1 Introduction

L'identification de la nature des chocs en relation avec la persistance de leurs effets est usuelle dans la littérature économique et financière utilisant les modèles VAR structurels. Blanchard et Quah (1989) identifient par exemple des chocs d'offre et de demande d'après le caractère respectivement permanent et transitoire de leurs effets sur l'activité. Plus récemment, Beaudry et Koop (1993) ont étudié - et confirmé- la persistance des effets des innovations négatives et les innovations positives du PIB sur ce dernier. Ces derniers sont sévèrement biaisés à cause de la contrainte de symétrie qui est imposée. En particulier, la persistance des innovations positives a été sous-estimée et la persistance des innovations négatives a été sur-estimée.

Le but du présent article est d'examiner si les résultats relatifs à la persistance des effets de chocs sont influencés par l'asymétrie de ces derniers.

Potter (1995) prétend que des caractéristiques de la série du PIB américaine ne peuvent pas être évaluées par l'utilisation de méthodes linéaires, parce que la réponse du PIB aux chocs positifs et négatifs est asymétrique. Les modèles non linéaires utilisés pour étudier la dynamique du PIB américain après 1945 montrent que si l'économie est frappée par un choc négatif d'amplitude comparable à celle de la grande dépression, le taux d'accroissement du PIB revient à sa moyenne rapidement. Par contre les modèles linéaires, sur les mêmes données et la même période, ne permettent pas de montrer ce retour à la moyenne. D'après ces derniers modèles, un choc négatif comparable à la grande dépression maintient en effet le taux de croissance du PIB sous sa valeur moyenne pendant plusieurs années.

Pour détecter l'asymétrie dans le produit intérieur brut américain ainsi que les fluctuations du produit intérieur brut international, Razzek (2001) utilise le test triple de Randles et al (1980), qui est un test non paramétrique et robuste dans le sens où la variation de la variance de la série étudiée n'affecte pas le test. Il ne détecte aucune asymétrie dans le produit intérieur brut américain mais il met en évidence une asymétrie significative de la série internationale. Moosa, Silvapulle et Silvapulle (2003) ont également testé la présence d'une asymétrie temporelle dans la relation prix-volume en utilisant des données journalières portant sur les contrats à termes d'échéances respectives trois et six mois sur le marché du pétrole West Texas Intermediate. Ils examinent si les variations des prix courants dépendent ou non du sens de la variation des volumes retardés et réciproquement. Ce type d'asymétrie a été étudié par les économistes financiers à cause de ses implications sur la validité d'un certain nombre d'hypothèses telle que l'hypothèse d'efficience du marché. Leurs résultats montrent, d'une part, l'existence d'une causalité bidirectionnelle que le modèle symétrique n'est pas capable de détecter et, d'autre part, l'asymétrie de la relation prix-volume sur le marché à terme du pétrole brut: il trouvent en effet que les variations négatives des prix et des volumes sont plus importantes que les variations positives.

Dans cet article, nous nous intéressons à l'estimation d'une classe de modèles TIMA (Theeshold Integrated Moving Average) avec asymétrie contemporaine, avec l'objectif de répondre à deux questions: un choc positif et un choc négatif ont-ils le même impact à la date où ils surviennent? Les effets durables de ces deux chocs ont-ils la même amplitude?

Les modèles TIMA ont été récemment introduits par Gonzalo et Martinez (2003), sans asymétrie contemporaine, pour identifier les chocs permanents et les chocs transitoires¹. Par rapport aux modèles non linéaires existants, les modèles TIMA décrivent deux régimes de comportements de la partie moyenne mobile. Par exemple dans Gonzalo et Martinez (2003), les modèles TIMA proposés sont des modèles dont la partie moyenne mobile est inversible dans un régime et non inversible dans l'autre par suite de la présence d'une racine unitaire dans celui ci. Le premier régime correspond aux chocs transitoires tandis que le deuxième correspond aux chocs permanents.

L'introduction d'une asymétrie contemporaine (El Babsiri et Zakoian (2001); Guay et Scaillet(2003)) dans le modèle moyenne mobile intégré à seuil (TIMA), exclut une estimation directe du fait de la complexité de la fonction de vraisemblance², ce qui justifie le recours à la méthode d'inférence indirecte.

Cette méthode a été introduite dans la littérature économétrique par Gouriéroux et al. (1993); elle appartient à la classe des méthodes d'estimation simulées qui sont de plus en plus utilisées en économie et en finance. Ces dernières sont conçues pour estimer les modèles économétriques menant à des formulations complexes de leurs fonctions de vraisemblance et, de ce fait, difficiles à estimer par les méthodes standard telles que moindres carrés et maximum de vraisemblance. Ces méthodes incluent aussi la méthode des moments simulés (Duffie et Singleton 1993), et la méthode des moments efficaces (Galant et Tauchen 1996). La méthode d'inférence indirecte permet d'estimer les paramètres d'intérêt d'une façon indirecte, en utilisant un modèle auxiliaire: la méthode consiste à choisir l'estimateur $\hat{\theta}$ des paramètres d'intérêt θ de façon à minimiser l'écart quadratique entre les estimateurs des paramètres auxiliaires obtenus à partir des données observées et les estimateurs obtenus sur les données simulées.

La méthode d'inférence indirecte est a priori difficile à mettre en oeuvre. Pour qu'elle soit facile à implémenter, l'économètre doit choisir un modèle auxiliaire facile à estimer et une métrique de distance facile à évaluer. Cette méthode présente par ailleurs des limites. En effet, lorsque la fonction objectif à minimiser n'est pas dérivable par rapport aux paramètres du modèle, on ne peut pas utiliser la méthode d'optimisation basée sur les gradients et on doit donc utiliser des algorithmes d'optimisations plus lents. Souvent,

¹Par abus de langage, on appelle choc permanent (resp. transitoire) un choc dont les effets sont persistants (resp. transitoires).

²Voir l'annexe A pour une explication de ces difficultés.

ces algorithmes ne donnent pas de bons résultats dans le cas où il y a de nombreux paramètres à estimer.

La consistance et la normalité asymptotique des estimateurs obtenus par la méthode d'inférence indirecte (II) ont été démontrées analytiquement (Gouriéroux et al.(1993), Gouriéroux et Monfort (1995a)). Dans cet article, nous voulons étudier, empiriquement, la vitesse de convergence et la sensibilité des estimateurs II d'un modèle TIMA au nombre d'observations et au nombre de séries simulées et ainsi déterminer l'estimateur II dont la distribution est la plus proche de celle de la loi normale tel qu'il peut être caractérisé à partir des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement.

Cet article est organisé comme suit. Dans la section 2, on présente les modèles TIMA avec asymétrie contemporaine. La section 3 décrit le principe de la méthode d'inférence indirecte. Dans la section 4, on met en oeuvre des simulations de Monte Carlo pour valider le choix du modèle auxiliaire et évaluer sur des échantillons de taille finie les propriétés asymptotiques attendues pour un estimateur obtenu par la méthode d'inférence indirecte. Dans la section 5 on décrit un test non standard pour tester l'effet de seuil dans la série des rendements en pourcentage de l'indice CAC40. En section 6, on met en oeuvre l'estimation d'un modèle TIMA avec asymétrie contemporaine sur cette même série. On conclut en section 7.

2 Le Modèle.

Dans cette section, on présente la classe des modèles TIMA avec asymétrie contemporaine. Les modèles TIMA ont été introduits par Gonzalo et Martinez (2003), mais sans asymétrie contemporaine. La forme générale d'un modèle TIMA d'ordre 1 est alors la suivante:

$$A(L)\Delta y_t = A(L)x_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_{t-1}\varepsilon_{t-1}I_{\varepsilon_{t-1} > \gamma} \quad (1)$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \theta_{t-1} = \theta_1 \text{ si } z_{t-1} > \gamma \\ \theta_{t-1} = \theta_2 \text{ si } z_{t-1} < \gamma \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} I_{z_{t-1} > \gamma} = 1 \text{ si } z_{t-1} > \gamma \\ I_{z_{t-1} > \gamma} = 0 \text{ si } z_{t-1} < \gamma \end{array} \right\}$$

Δ indique la différence première, y_t est la série à étudier, x_t est la série de ses incréments, ε_t est la série des chocs (innovations), z_t est la variable de seuil, γ est le seuil, μ est une constante et L est l'opérateur retard. $A(L)$ est le polynôme autorégressif, dont on suppose qu'il a toutes ses racines situées en dehors du cercle unitaire et I est une fonction indicatrice qui prend la valeur 1 si son argument est vérifié et 0 sinon. Gonzalo et Martinez (2003) distinguent deux spécifications de la variable soumise à l'effet de seuil. Dans le premier cas, $z_{t-1} = \varepsilon_{t-1}$, le choc est alors soumis directement à un effet de seuil. Dans le deuxième cas, la variable de seuil peut être n'importe quelle variable observable et prédéterminée, par exemple l'incrément de la série, x_t .

L'introduction d'une asymétrie contemporaine conduit à la formulation générale suivante :

$$A(L)\Delta y_t = A(L)x_t = \mu + B^+(L)\varepsilon_t^+ + B^-(L)\varepsilon_t^- \quad (2)$$

où μ est une constante, $\varepsilon_t^+ = \varepsilon_t I_{\varepsilon_t > \gamma}$, $\varepsilon_t^- = \varepsilon_t I_{\varepsilon_t \leq \gamma}$ et $\varepsilon_t \rightarrow \text{iid } N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Le paramètre γ correspond au seuil qui régit les effets asymétriques des chocs aléatoires. Le polynôme $A(L)$ d'ordre 1 décrit la dynamique de la partie autorégressive et les polynômes $B^+(L) = b_0^+ + b_1^+L + \dots + b_q^+L^q$ et $B^-(L) = b_0^- + b_1^-L + \dots + b_q^-L^q$, d'ordre q décrivent les dynamiques des termes d'erreurs. L'asymétrie contemporaine est modélisée grâce à l'introduction des paramètres b_0^+ et b_0^- . Ce type d'asymétrie concerne l'effet immédiat d'un choc.

Definition 1 *On dit que la série X_t présente une asymétrie contemporaine lorsque les coefficients b_0^+ et b_0^- sont différents.*

Contrairement aux modèles symétriques, un modèle TIMA intègre des innovations différentes suivant le régime³.

El Babsiri et Zakoian (2001) ont introduit l'asymétrie contemporaine dans le modèle GARCH et leur application de ce modèle à l'indice CAC40 a révélé l'existence d'une asymétrie contemporaine. Guay et Scaillet(2003) ont également introduit ce type d'asymétrie dans le modèle moyenne mobile à seuils, qu'ils ont utilisé pour tester l'effet de seuils dans la série des taux de croissance du produit national brut américain. Ils ont alors montré l'existence d'une importante asymétrie contemporaine dans la série étudiée.

3 Principe de la Méthode d'Inférence Indirecte

Soit le modèle dynamique suivant:

$$\begin{aligned} y_t &= f(\theta, y_{t-1}, x_t, u_t), \quad t \in 1, \dots, T \\ u_t &= \rho u_{t-1} + e_t \end{aligned}$$

où θ est le vecteur des paramètres structurels, de dimension p , x_t est un vecteur de variables exogènes, y_t est la variable endogène et e_t est un bruit blanc non observé de distribution G inconnue. L'objectif est d'estimer θ quand $f(\cdot)$ n'a pas une forme explicite et lorsqu'il est possible de simuler les données y à partir d'un modèle structurel pour un ensemble donné de valeurs initiales des paramètres structurels θ .

La mise en oeuvre de la méthode d'inférence indirecte nécessite le choix d'un modèle auxiliaire de vecteur de paramètres β de dimension q avec $q \succeq p$,

³En présence d'une asymétrie contemporaine la variance conditionnelle, $V(X_t/X_{t-1})$, où $X_{t-1} = \{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_1\}$, n'est pas la même, en effet, dans chacun des régimes.

cette dernière condition correspondant à la condition d'identification. Notons qu'il n'existe pas de règles exhaustives pour décider du choix du modèle auxiliaire.

Soit $Q(Y_{[T]}, \beta) = \sum_{t=1}^T q_t(y_t, \beta)$ la fonction objectif associée au modèle auxiliaire et utilisant les données observées, Y , et $Q(\tilde{Y}_{[TH]}, \beta)$ la fonction objectif pour le même modèle auxiliaire mais évaluée avec les données simulées, \tilde{Y} , où T est le nombre d'observations et H est le nombre de séries simulées. Soient $\hat{\beta}$ et $\tilde{\beta}$ les maximums respectifs des fonctions objectifs précédentes.

En notant D l'écart entre les deux estimateurs des paramètres auxiliaires :

$$D = \hat{\beta}_{[T]}(Y_{[T]}) - \tilde{\beta}_{[TH]}(\tilde{Y}_{[TH]}),$$

l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ est obtenu en résolvant l'équation suivante :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\text{Arg min}}(D' \Omega D)$$

où Ω caractérise la norme retenue pour mesurer la distance.

Sous certaines conditions de régularité données dans Gouriéroux et al. (1993):

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} N(0, W)$$

Il existe un choix optimal Ω^* de Ω qui donne la matrice de variance-covariance minimale W^* de W où W est la matrice de variance-covariance de l'estimateur indirect. Gouriéroux et al. (1993) donnent les formes explicites suivantes pour D et Ω^* .⁴

$$\begin{aligned} \Omega^* &= J_0 I_0^{-1} J_0 \\ I_0^{-1} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^T \frac{\partial Q(Y_t, \beta)}{\partial \beta} \right)^{-1} \\ J_0 &= -\frac{1}{T} \sum_{k=0}^T \frac{\partial^2 Q(Y_t, \beta)}{\partial \beta \partial \beta'} \end{aligned}$$

Ce choix optimal Ω^* de Ω donne la matrice de variance-covariance optimale W^* de W suivante:

$$W_H^* = \left(1 + \frac{1}{H}\right) \left(E \left[\frac{\partial^2 Q(\tilde{Y}_{[TH]}, \beta)}{\partial \theta \partial \beta'} \right] J_0^{-1} E \left[\frac{\partial^2 Q(\tilde{Y}_{[TH]}, \beta)}{\partial \beta \partial \theta'} \right] \right)^{-1}$$

Dans la section suivante, nous examinons quelques propriétés, à distance finie, de l'estimateur indirect $\hat{\theta}$ des paramètres structurels d'un modèle TIMA(1) avec asymétrie contemporaine et notamment l'influence de l'ordre d'un modèle AR choisi comme modèle auxiliaire, en fonction du nombre d'observations et du nombre de simulations.

⁴Gouriéroux et al (1993) dérivent la forme de ces expressions pour une série simulée contenant T.H termes

4 Etude Monte Carlo

Nous mettons en oeuvre des simulations de Monte Carlo pour évaluer les propriétés de l'estimateur $\hat{\theta}$ en échantillon fini.

Le principe de l'analyse est le suivant. Pour chaque expérience de Monte Carlo, on simule une série $\{Y_t\}_{t=1}^T$ à partir de l'équation (2) en choisissant une valeur initiale pour θ , sous l'hypothèse que $\varepsilon_t \stackrel{L}{=} N(0, 1)$, où $\stackrel{L}{=}$ indique l'identité en loi; cette première simulation utilise un premier générateur de nombres aléatoires. On utilise ensuite le modèle (2) pour simuler des séries $\{\tilde{Y}_t\}_{t=1}^{TH}$ pour une valeur initiale de θ toujours sous l'hypothèse $\varepsilon_t \stackrel{L}{=} N(0, 1)$ mais en utilisant un deuxième générateur de nombres aléatoires, différent du premier. Les séries $\{\tilde{Y}_t\}_{t=1}^{TH}$ sont simulées à nouveau avec des valeurs mises à jours de θ mais avec le même deuxième générateur de nombres aléatoires jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit satisfait.

En pratique, $\frac{\partial^2 Q(\tilde{Y}_{[TH]}, \beta)}{\partial \theta \partial \beta'}$ est obtenue en prenant la moyenne (sur les séries simulées) des dérivées numériques de $\partial Q / \partial \beta'$ par rapport à θ évaluées en $\hat{\theta}$. La quantité I_0 est approximée comme étant la matrice de covariance de $\partial Q / \partial \beta$ sur les données observées. On utilise la fenêtre de Parzen comme fonction de pondération. On rappelle que les poids de la fenêtre de Parzen sont donnés par¹ :

$$w(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 - 6x^2 + 6|x|^3 \text{ si } 0 \leq |x| \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - |x|)^3 \text{ si } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1 \end{array} \right\}$$

Dans cette évaluation par méthode de simulations, on choisit comme modèle auxiliaire un modèle autorégressif d'ordre p , dont la fonction de log-vraisemblance s'écrit, sous l'hypothèse de normalité des résidus, sous la forme :

$$Q = -\frac{T-p}{2} \ln \sigma^2 + \sum_{t=p+1}^T \frac{(y_t - \beta_0 - \beta_1 y_{t-1} - \beta_2 y_{t-2} - \dots - \beta_p y_{t-p})^2}{2\sigma^2}$$

Plus précisément, nous cherchons à estimer un modèle TIMA(1) avec asymétrie contemporaine, modèle qui se révélera bien adapté à l'étude de la dynamique des rendements du CAC présentée en dernière section. Nous fixons à 500 le nombre de simulations retenu pour évaluer la performance de la méthode d'estimation indirecte.

Les paramètres structurels sont fixés de la manière suivante : $b_0^+ = 0.9$, $b_1^+ = 1$, $b_0^- = 0.5$ et $b_1^- = 0.3$, avec un seuil est fixé à zéro .

Dans le modèle TIMA étudié, les chocs positifs ont donc un effet plus important que les chocs négatifs.

D'après la condition d'identification, le nombre de paramètres auxiliaires doit être supérieur ou égal au nombre de paramètres structurels. Si un choisit

un modèle AR comme modèle auxiliaire, il doit donc être au moins d'ordre 3^5

Par la suite, on donne, à titre illustratif, les résultats relatifs aux modèles AR(3) et AR(5)⁶.

L'expérience de simulation est réalisée pour $T = 100, 200, \dots, 2000$.

Les résultats montrent que le modèle AR(3) est plus performant que le modèle AR(5) pour $T \geq 800$ si on se réfère au critère RMSE. Les résultats pour $T = 800$ sont regroupés dans les tableaux 1 et 2. Dans la suite du papier les colonnes S et K dans les tableaux indiquent les moments d'ordre 3 et d'ordre 4, respectivement. La colonne JB indique la valeur de la statistique de Jarque-Bera⁷.

Tableau 1 : Estimation d'un TIMA(1) par un AR(3)

paramètres	BIAIS	RMSE	S	K	JB
b_0^+	-0.0007	0.0010	-0.0438	3.2176	1.1468
b_0^-	-0.0008	0.0012	-0.0439	3.2174	1.1459
b_1^+	-0.0003	0.0004	-0.0421	3.2202	1.1584
b_1^-	0.0000	0.0000	-0.0311	3.2375	1.2569

Tableau 2 : Estimation d'un TIMA(1) par un AR(5)

paramètres	BIAIS	RMSE	S	K	JB
b_0^+	0.0013	0.0024	-0.1699	3.2312	3.5202
b_0^-	0.0014	0.0027	-0.1681	3.2311	3.4707
b_1^+	0.0004	0.0020	-0.0971	3.2307	1.8950
b_1^-	0.0003	0.0006	-0.1741	3.2320	3.6488

Les tableaux précédents montrent que le critère RMSE, , de même que les biais pour tous les paramètres augmentent lorsque l'ordre du modèle autorégressif passe de 3 à 5. Une augmentation de l'ordre du processus AR entraîne également une déviation accrue par rapport à la normalité. Les coefficients d'asymétrie et d'applatissage passent en effet respectivement

⁵Dans un AR(3) on a 5 paramètres auxiliaires à estimer (la constante et les 3 paramètres liés à x_{t-1} , x_{t-2} , et x_{t-3} et la variance des erreurs) à comparer aux 5 paramètres du modèle TIMA (les coefficients b et la variance des erreurs).

⁶Les résultats de l'estimation montrent qu'un modèle AR(3) est plus performant qu'un modèle AR(4), lorsque T supérieur ou égal à 900 et qu'un modèle AR(4) est lui-même plus performant qu'un modèle AR(5) pour estimer le modèle TIMA(1) précédent. L'augmentation de l'ordre du modèle AR n'est donc pas avantageux.

⁷ $JB = \frac{T}{6} (S^2 + \frac{(K-3)^2}{4})$

Le test de Jarque-Bera vaut 0 quand les données suivent une loi normale caractérisée par un coefficient d'asymétrie S nul et un coefficient d'applatissage égal K à 3; la distribution des estimateurs montre un comportement approximativement normal quand la valeur de la statistique JB est proche de zéro.

de -0.0438, -0.0439, -0.0421, -0.0311 et 3.2176, 3.2174, 3.2202, 3.2375 dans le cas d'un AR(3) à -0.1699, -0.1681, -0.0971, -0.1741 et 3.5202, 3.4707, 1.8950, 3.6488 dans le cas d'un AR(5). La plus petite valeur de la RMSE est obtenue avec le modèle AR(3). On trouve les mêmes résultats pour les nombres d'observations $T = 900, 1000, \dots, 2000^8$.

Il faut ensuite déterminer le nombre d'observations qui assure la meilleure proximité avec la loi normale en termes de troisième et quatrième moments. Cette étude porte sur les nombres d'observations 800, 900, ..., 2000. Seuls les résultats relatifs aux nombres d'observations 1000 et 1200 sont reportés dans les tableaux 3 et 4 car les valeurs des moments d'ordre 3 sont alors les plus proches de celles d'une loi normale.

On observe que le biais et le RMSE diminuent à mesure que le nombre d'observations augmente.

Tableau 3 : Estimation d'un TIMA(1) par un AR(3): 1000 observations

paramètres	BIAIS	RMSE	S	K	JB
b_0^+	-0.0002	0.0007	-0.0119	3.0674	0.1067
b_0^-	-0.0002	0.0008	-0.0121	3.0673	0.1068
b_1^+	-0.0001	0.0003	-0.0095	3.0687	0.1061
b_1^-	0.0000	0.0000	0.0059	3.0780	0.1297

Tableau 4 : Estimation d'un TIMA(1) par un AR(3): 1200 observations

paramètres	BIAIS	RMSE	S	K	JB
b_0^+	-0.0002	0.0007	-0.0124	2.9860	0.0170
b_0^-	-0.0003	0.0007	-0.0126	2.9859	0.0174
b_1^+	-0.0001	0.0003	-0.0103	2.9868	0.0125
b_1^-	0.0000	0.0000	0.0029	2.9936	0.0015

On remarque également que l'augmentation du nombre d'observations fait diminuer le biais des paramètres relatifs aux chocs positifs et celui des paramètres relatifs aux chocs négatifs. L'importance du gain en terme de RMSE apparaît plus clairement lorsqu'on passe de 100 à 800 observations et reste faible pour des nombres d'observations plus élevés. La normalité asymptotique caractérisée en terme de coefficient d'asymétrie est atteinte pour 1200 observations. Enfin, La statistique de Jarques-Bera est plus proche de 0 pour le nombre d'observations 1200.

On examine ensuite l'influence du nombre de séries simulées sur le coefficient d'aplatissement. On constate qu'une augmentation de ce nombre améliore marginalement la normalité caractérisée selon le coefficient d'aplatissement.

⁸Les résultats Monte Carlo de la comparaison de l'estimation d'un TIMA(1) par un AR(3) et un AR(5) pour ces nombres d'observations sont disponibles sur demande adressée aux auteurs.

Conjointement, les résultats reportés dans les tableaux 5 , 6 et 7 montrent que l'augmentation du nombre de séries simulées fait augmenter la RMSE des estimateurs.

Tableau 5 : Estimation d'un TIMA(1) par un AR(3): 5 séries simulées

paramètres	BIAIS	RMSE	S	K	normalité
b_0^+	0.0241	0.0675	0.0552	3.4036	3.6483
b_0^-	0.0276	0.0775	0.0342	3.3844	3.1771
b_1^+	0.0219	0.0698	-0.3781	3.2414	13.1314
b_1^-	0.0064	0.0178	0.1049	3.4412	4.9752

Tableau 6 : Estimation d'un TIMA(1) par un AR(3): 10 séries simulées

paramètres	BIAIS	RMSE	S	K	JB
b_0^+	0.0378	0.0765	0.1702	3.1576	2.9324
b_0^-	0.0434	0.0880	0.1499	3.1370	2.2652
b_1^+	0.0375	0.0796	-0.2478	2.9441	5.1843
b_1^-	0.0100	0.0202	0.2199	3.1944	4.8179

Tableau 7 : estimation d'un TIMA(1) par un AR(3) avec 1200 observations et 2 séries simulées.

paramètres	BIAIS	RMSE	S	K	JB
b_0^+	0.0088	0.0162	0.0993	2.9843	0.8268
b_0^-	0.0099	0.0181	0.0993	2.9843	0.8277
b_1^+	0.0038	0.0070	0.0986	2.9844	0.8153
b_1^-	0.0008	0.0014	0.0940	2.9856	0.7408

On choisit finalement 2 séries simulées car le gain "en normalité" est minime lorsqu'on passe de 2 à 10 séries simulées. Le tableau 7 récapitule les résultats de l'estimation de θ obtenus en prenant comme modèle auxiliaire un AR(3) avec 1200 observations et 2 séries simulées. Le biais des estimateurs est faible ainsi que le RMSE. D'autre part, la normalité asymptotique est atteinte en terme de coefficient d'asymétrie et de coefficient d'aplatissement. En effet, la combinaison précédente donne la valeur 0.09 pour le troisième moment et 2.98 pour le quatrième moment qui sont proches de celles d'une distribution gaussienne à savoir 0.0000 et 3.0000, respectivement. Ceci est confirmé par la statistique de Jacques Bera.

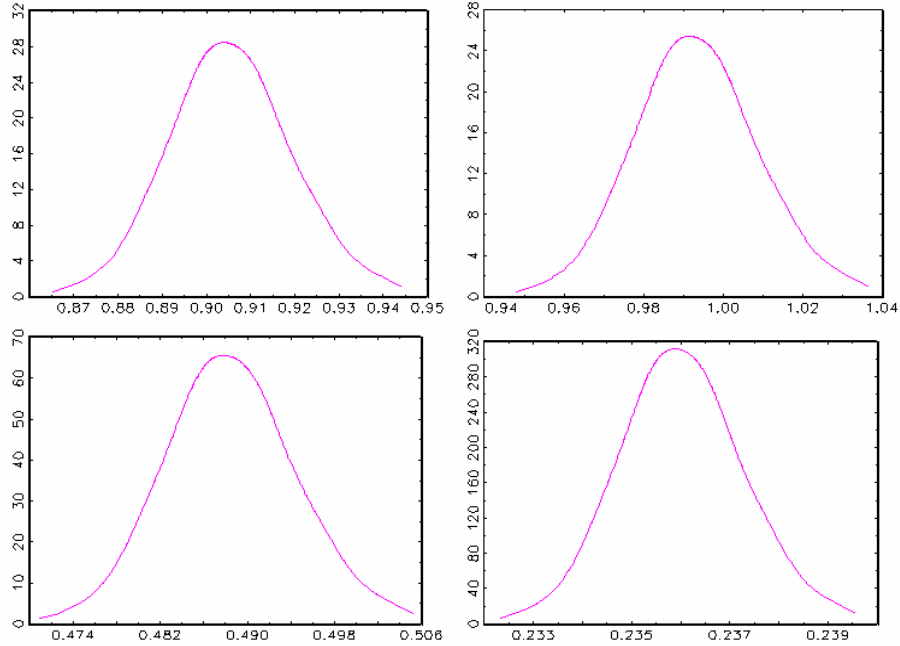


Figure 1 : Représentation des densités des estimateurs II par la méthode des noyaux gaussiens

5 Test d'un effet de seuil

Dans cette section, on se propose d'étudier l'existence d'un effet de seuil dans la série étudiée. L'hypothèse d'un effet de seuil garantit l'existence d'un comportement asymétrique dans la persistance des chocs.

Si on appelle $\theta_1 = (b_0^+, b_1^+)'$ et $\theta_2 = (b_0^-, b_1^-)' - (b_0^+, b_1^+)'$, alors tester l'existence d'un effet de seuil revient à tester l'hypothèse nulle $H_0 : \{\theta_2 = 0\}$. Sous cette hypothèse, le paramètre de seuil γ est non identifié. Les tests standard ne peuvent pas être appliqués sous les conditions précédentes. Plusieurs auteurs ont proposé des solutions à ce problème. Hansen (1996) propose une reparamétrisation du type $\theta_2 = \frac{c}{\sqrt{T}}$. Suite à cette reparamétrisation, notre test se réduit à tester l'hypothèse nulle $H_0 : c = 0$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : c \neq 0$. Nous utilisons la statistique du multiplicateur de Lagrange. Une version de cette statistique, robuste à l'hétéroscédasticité, prend la forme suivante:

$$LM_T(\gamma) = TC_T(\gamma)' \tilde{V}_T(\gamma) C_T(\gamma)$$

où R est la matrice $R = (0 \ I_p)'$, $C_T(\gamma) = \nabla_{\theta} \hat{\beta}_T^N(\tilde{\theta}_T, \gamma) \Omega_T^*(\gamma) (\hat{\beta}_T - \hat{\beta}_T^N(\tilde{\theta}_T, \gamma))$, T est le nombre d'observations, I_p est la matrice identité d'ordre p et $\tilde{V}_T(\gamma)$ est la matrice de variance-covariance de $C_T(\gamma)$ (cf. Gouriéroux et al. (1993) pour l'expression de cette matrice).

Trois versions de la statistique $LM_T(\gamma)$ ont été étudiées. Davies (1977, 1987) a proposé de tester H_0 par la statistique $\sup LM_T = \sup_{\gamma \in \Gamma} LM_T(\gamma)$. Andrews et Ploberger (1994) ont proposé de tester H_0 par les statistiques $aveLM_T = \int LM_T(\gamma)dW(\gamma)$ et $\exp LM_T = Ln(\int \exp(\frac{1}{2}Z(\gamma))dW(\gamma))$ où W est la fonction des poids des valeurs de γ dans Γ .

Ces auteurs montrent que l'utilisation des deux dernières statistiques garantit une meilleure performance locale du test.

Les trois statistiques précédentes peuvent être écrites comme des fonctions $g(LM_T)$, où $g(\cdot)$ est une fonction qui transforme l'ensemble Γ de variation γ en R .

Soit LM^0 un processus suivant la loi de χ^2 , on appelle $g^0 = g(LM^0)$ et on note $F^0(\cdot)$ la fonction de répartition de g^0 . On définit $p_T = 1 - F^0(g_T)$. Sous les hypothèses mentionnées dans Hansen (1996), on peut montrer que la distribution de p_T sous H_0 ne dépend pas du paramètre de nuisance γ . Le test rejette H_0 si $p_T \leq \alpha$. Dans le cas où p_T suit une loi uniforme sous H_0 , α représente la taille du test; sinon α constitue une taille asymptotique du test, telle que: $\lim_{T \rightarrow \infty} P\{p_T = \alpha/c = 0\} = \alpha$. On désigne alors p_T sous le nom de p-value asymptotique.

Hansen (1996) montre sous les mêmes hypothèses que : ⁹

$$LM_T \Rightarrow LM^c \text{ et } g^c \Rightarrow g(LM^c)$$

La fonction de puissance asymptotique associée aux tests est alors:

$$\pi_\alpha(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{p_T \leq \alpha/c\} = P\{F^0(g^c) \geq 1 - \alpha/c\}$$

Par simulation de Monte Carlo, on évalue la puissance et la taille des trois statistiques de test utilisées dans ce papier, selon le nombre d'oservations.

Tableau 9 : Puissance des statistiques de test au seuil de 5%

T	SupLM	ExpLM	AveLM
100	0.882	0.896	0.924
200	0.912	0.93	0.944
300	0.926	0.936	0.946
400	0.942	0.938	0.948
500	0.960	0.962	0.966
600	0.966	0.968	0.978
700	0.968	0.972	0.978
800	0.968	0.974	0.974
900	0.982	0.980	0.980
1000	0.998	0.998	0.998
1100	0.998	0.998	0.998
1200	0.998	0.998	0.998

⁹Pour l'expression de LM^c , voir théorème 1 dans Hansen (1996).

Tableau 10 : Taille des statistiques de test au seuil de 5%

T	SupLM	ExpLM	AveLM
700	0.124	0.110	0.108
900	0.116	0.092	0.076
1000	0.112	0.090	0.074

Le tableau 9 montre que les statistiques de test utilisées ont une bonne puissance qui atteint la valeur 0.998 pour toutes les statistiques de test quand le nombre d'observations est supérieur ou égal à 1200. Les résultats reportés dans le tableau 10 montrent que les statistiques de test présentent une taille qui s'approche de la valeur nominale. La statistique AveLM prend la valeur 0.076 quand le nombre d'observations est 1000.

6 Applications aux Dynamiques Boursières

Dans cette section nous appliquons les résultats des sections précédentes pour mesurer les effets des chocs intervenant dans la série des rendements journaliers, pris en pourcentage, de l'indice CAC40, sur la période de novembre 2000 à juin 2005.

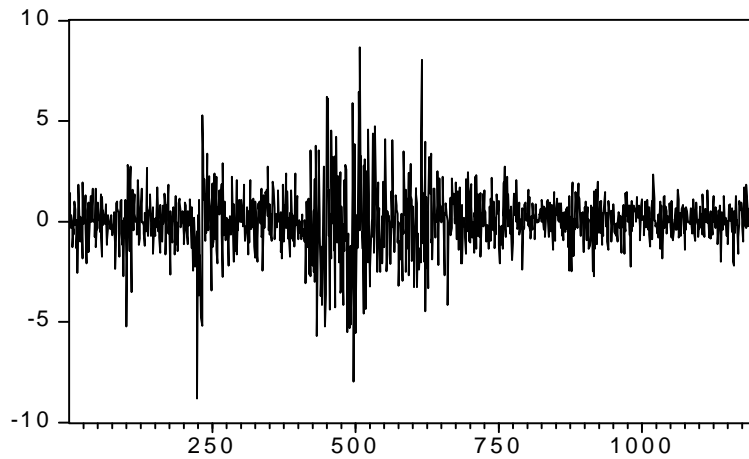


Figure 2 : Rendements journaliers de l'indice CAC40 en pourcentage

Les rendements de la série CAC40 présentent des déviations de la normalité. En effet, les données sont caractérisées par un moment d'ordre 3 égal à -0.1002 et un moment d'ordre 4 égal à 8.0429. Ceci est confirmé par le test de normalité de Jacques-Bera (1273,568; p-value=0.000)

Le corrélogramme de la série des rendements montre que la première autocorrélation et la première autocorrélation partielle sont significatives, ce

qui indique que les modèles AR(1) et le modèle MA(1) peuvent approcher la série de manière satisfaisante. Les résidus issus de l'estimation d'un AR(1) sont corrélés (la p-value pour le test LM de Breusch-Godfrey est égale à 0,04) contrairement aux résidus issus de l'estimation d'un MA(1), ces derniers ne montrant pas d'autocorrélation significative (la p-value est égale à 0.23). On conclut donc qu'une modélisation moyenne mobile d'ordre 1 semble adéquate pour cette série.

Le tableau 11 montre les résultats des tests fondés sur les statistiques *supLM*, *expLM* et *aveLM* :

Tableau 11 : Test d'un effet de seuil dans les rendements du CAC40 en pourcentage

	supLM	expLM	aveLM
p-values	0.000	0.000	0.000

Quelle que soit la statistique utilisée, le modèle IMA(1) est fortement rejeté en faveur du modèle moyenne mobile intégré à seuil. On trouve une valeur négative du seuil égale à -0.1034%.

Nous avons utilisé un modèle AR(3) comme modèle auxiliaire. Ce choix est validé empiriquement. On peut montrer en effet que les modèles AR(4) et AR(5) choisis comme modèles auxiliaires fournissent des estimateurs des paramètres structurels moins précis qu'un modèle AR(3). Les résultats sont disponibles sur demande.

Les résultats de l'estimation du modèle TIMA sont donnés dans le tableau 12.

Tableau 12 : Résultat de l'estimation d'un TIMA(1)

	b_0^+	b_0^-	b_1^+	b_1^-
valeurs estimées	0.8972	0.8150	0.5980	0.2418
Ecart-types	0.0003	0.0172	0.0102	0.0058

Nous détectons donc la présence d'une asymétrie contemporaine et retardée dans la dynamique des rendements de l'indice CAC40.

Guay et Scaillet (2003) proposent de mesurer la persistance d'un choc par la somme des coefficients moyennes mobiles portant respectivement les signes + et -, selon que le choc est au dessus ou au dessous de la valeur du seuil. L'interprétation de cette somme en terme de persistance peut être discutée, puisque les rendements sont stationnaires, ce qui implique, de facto que les effets de tout choc sont transitoires; on peut cependant considérer que cette somme mesure l'intensité (l'amplitude) de l'effet d'un choc répété à l'identique sur plusieurs périodes successives (ici deux). On constate alors qu'un choc répété, supérieur à -0.1034%, a un effet de plus forte intensité (1,4952) qu'un choc répété, maintenu sous le seuil -0,1034% .

7 Conclusion

Dans ce papier, nous avons détecté la présence d'une asymétrie contemporaine et retardée dans la dynamique des rendements de l'indice CAC40. Un choc plus fort qu'une valeur seuil a un effet significativement plus marqué qu'un choc inférieur à ce seuil. Nous avons limité la propriété d'asymétrie à la dynamique de court terme. On pourrait aussi envisager d'étudier l'existence d'une asymétrie retardée dans le paramètre d'intégration fractionnaire dans les modèles ARFIMA et évaluer la performance d'un ARFIMA avec asymétrie régissant le paramètre d'intégration fractionnaire par rapport à un modèle ARFIMA symétrique. Plus généralement, une extension de ce travail pourra porter sur l'étude de l'interaction entre le type d'asymétrie détecté et la prévision des cours des actions sur le marché financier français, avec des perspectives de gestion de portefeuilles.

Il serait alors intéressant d'étendre au cas multivarié l'analyse qui a été limitée au cas univarié dans le présent papier.

Par exemple, les prix des actifs financiers, et par conséquent, leurs rendements sont réputés être corrélés avec les indices boursiers des places où ils sont cotés, ce qui est une implication notamment du MEDAF. À l'issue des résultats obtenus dans ce papier, on peut envisager d'examiner la question suivante : la partie MA, d'une part, l'asymétrie d'autre part, détectées dans les rendements de l'indice CAC, permettent-elles d'améliorer la modélisation des rendements des actifs qui le composent et de diminuer notamment les écarts entre les prix théoriques et les prix observés de ces actifs?

Cette question est à l'évidence intéressante pour les gestionnaires de portefeuille qui recherchent une meilleure prévision de la rentabilité, ou pour les intermédiaires financiers qui choisissent la spéculation et qui ont donc besoin de calculer des prix de référence par rapport auxquels ils jugent que les titres sont sur ou sous-évalués. Dans ce cas, il convient d'examiner s'il n'est pas préférable d'étudier l'asymétrie éventuelle de la dynamique des prix et non plus seulement de celle des rendements. On rejoint alors la suggestion première de travailler sur les modèles ARFIMA.

References

- [1] Andrews, D., et Ploberger, W.(1994), "Optimal Tests When a Nuisance Parameter is Only Present Under the Alternative," *Econometrica*, 62, 1383-1414.
- [2] Beaudry, P., et Koop, G.(1993), "Do Recessions Permanently Change Output?," *Journal of Monetary Economics*, 31, 149-163.
- [3] Blanchard O-J. et Quah D.(1989), "The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances", *American Economic Review*, 79, 655-673.
- [4] Chan, K.(1990), "Testing for Threshold Autoregression," *Annals of Statistics*, 18, 1886-1894.
- [5] Davies, R.(1977), "Hypothesis Testing When a Nuisance Parameter is Present Only Under the Alternative," *Biometrika*, 64, 247-254.
- [6] Davies, R.(1987), "Hypothesis Testing When a Nuisance Parameter is Present Only Under the Alternative," *Biometrika*, 74, 33-43.
- [7] Duffie, D., et Singleton, K. J.(1993), "Simulated Moments estimation of Markov Models of Asset Prices", *Econometrica*, 61, 929-952.
- [8] El Babsiri, M. et Zokaoian, J. M.(2001), "Contemporaneous Asymmetry in Garch Processes," *Journal of econometrics*, 101, 257-294.
- [9] Gallant, R., et Tauchen, G.(1996), " Which Moments to Match?," *Econometric Theory*, 12, 657-681.
- [10] Guay, A. et Scaillet, O.(2003), "Indirect Inference, Nuisance Parameter, and Threshold Moving Average Models", *Journal of Business and Economic Statistics*, vol 21, issue 1, 122-123.
- [11] Gonzalo O. et Martinez J. (2004), "Threshold Integrated Moving Average Models (Does Size Matter? Maybe So)," *Econometric Society 2004 North American Winter Meetings* 145, *Econometric Society*.
- [12] Gouriéroux, C., et Monfort, A.(1995a), "Simulation Based Econometric Methods", *Core Lecture Series and Oxford University Press*.
- [13] Gouriéroux, C., Monfort, A. et Renault, E.(1993), "Indirect Inference", *Journal of Applied Econometrics*, 8, 85-118.
- [14] Hansen, B.(1996), "Inference When a Nuisance Parameter is not Identified Under the Null Hypothesis," *Econometrica*, 64, 413-430.

- [15] Michaelides, A., et Ng, S.(2000), "Estimating the Rational Expectations Model of Speculative Storage: A Monte Carlo Comparison of Three Simulation Estimators," *Journal of Econometrics*, 96, 231-266.
- [16] Moosa A-I, Silvapulle P. et Silvapulle M. (2003), "Testing for temporal Asymmetry in the Price-Volume Relationship", *Bulletin of Economic Research*, 55, 373-389.
- [17] Potter S.(1995), "A Nonlinear Approach to U.S GNP", *Journal of Applied Econometrics*, 10, 109-125.
- [18] Randles, R., Flinger, M., Policello, G. and Wolfe, D.(1980), "An Asymptotically Distribution-Free Test for Symmetry Versus Asymmetry", *Journal of the American Statistical Association* 75 (1980), pp. 168–172.
- [19] Razzek (2001), "Business cycle asymmetries: International evidence", *Review of Economic dynamics*, 4, 230-243.
- [20] Wecker, W.(1981), "Asymmetric Time Series", *Journal of the American Statistical Association*, 76, 16-21.

Annexe

A. Dérivation de la fonction de vraisemblance d'un modèle TIMA avec asymétrie contemporaine

On suppose que:

$$\Delta y_t = b_0^+ \varepsilon_t \mathbf{1}_{\varepsilon_t > \gamma} + b_0^- \varepsilon_t \mathbf{1}_{\varepsilon_t \leq \gamma} \text{ avec } \varepsilon_t \text{ iid } \longrightarrow N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Si on cherche à caractériser la distribution de Δy_t , on doit écrire:

$$P(\Delta y_t < s) = P(\Delta y_t < s \text{ et } \varepsilon_t > \gamma) + P(\Delta y_t < s \text{ et } \varepsilon_t \leq \gamma)$$

On fixe d'abord b_0^+ , b_0^- ; si on suppose que ces paramètres sont tous les deux positifs, l'expression précédente devient:

$$P(\Delta y_t < s) = P(b_0^+ \varepsilon_t < s \text{ et } b_0^+ \varepsilon_t > b_0^+ \gamma) + P(b_0^- \varepsilon_t < s \text{ et } b_0^- \varepsilon_t \leq \gamma b_0^-)$$

$$\begin{aligned} P(\Delta y_t < s) &= \left(\int_{b_0^+ \gamma}^s f_{N(0, b_0^{+2} \sigma_\varepsilon^2)}(u) du \right) \mathbf{1}_{s > \gamma b_0^+} + \\ &\quad \left(\int_{-\infty}^s f_{N(0, b_0^{-2} \sigma_\varepsilon^2)}(u) du \right) \mathbf{1}_{s \leq \gamma b_0^-} \\ &\quad + \left(\int_{-\infty}^{\gamma b_0^-} f_{N(0, b_0^{-2} \sigma_\varepsilon^2)}(u) du \right) \mathbf{1}_{s > \gamma b_0^-} \end{aligned}$$

Si on a maintenant $b_0^+ > 0$ et $b_0^- < 0$, on doit écrire:

$$P(\Delta y_t < s) = P(b_0^+ \varepsilon_t < s \text{ et } b_0^+ \varepsilon_t > b_0^+ \gamma) + P(b_0^- \varepsilon_t < s \text{ et } b_0^- \varepsilon_t \geq \gamma b_0^-)$$

soit:

$$\begin{aligned} P(\Delta y_t < s) &= \left(\int_{b_0^+ \gamma}^s f_{N(0, b_0^{+2} \sigma_\varepsilon^2)}(u) du \right) \mathbf{1}_{s > \gamma b_0^+} \\ &\quad + \left(\int_{b_0^- \gamma}^s f_{N(0, b_0^{-2} \sigma_\varepsilon^2)}(u) du \right) \mathbf{1}_{s > \gamma b_0^-} \end{aligned}$$

etc...en complétant pour les cas $b_0^+ < 0$ et $b_0^- > 0$ et $b_0^+ < 0$ et $b_0^- < 0$.

Pour écrire la vraisemblance, il faut pouvoir dériver les expressions précédentes par rapport à s , de façon à calculer la densité pour chacune des observations:

$$\begin{aligned} f_{\Delta y}(s; b_0^+, b_0^-, \gamma, \sigma_\varepsilon) &= \mathbf{1}_{\{b_0^+ > 0 \text{ et } b_0^- > 0\}} \left[f_{N(0, b_0^{+2} \sigma_\varepsilon^2)}(s) \mathbf{1}_{s > \gamma b_0^+} + f_{N(0, b_0^{-2} \sigma_\varepsilon^2)}(s) \mathbf{1}_{s \leq \gamma b_0^-} \right] \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{b_0^+ > 0 \text{ et } b_0^- < 0\}} \left[f_{N(0, b_0^{+2} \sigma_\varepsilon^2)}(s) \mathbf{1}_{s > \gamma b_0^+} + f_{N(0, b_0^{-2} \sigma_\varepsilon^2)}(s) \mathbf{1}_{s > \gamma b_0^-} \right] \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{b_0^+ < 0 \text{ et } b_0^- > 0\}} \left[f_{N(0, b_0^{+2} \sigma_\varepsilon^2)}(s) \mathbf{1}_{s \leq \gamma b_0^+} + f_{N(0, b_0^{-2} \sigma_\varepsilon^2)}(s) \mathbf{1}_{s \leq \gamma b_0^-} \right] \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{b_0^+ < 0 \text{ et } b_0^- < 0\}} \left[f_{N(0, b_0^{+2} \sigma_\varepsilon^2)}(s) \mathbf{1}_{s \leq \gamma b_0^+} + f_{N(0, b_0^{-2} \sigma_\varepsilon^2)}(s) \mathbf{1}_{s > \gamma b_0^-} \right] \end{aligned}$$

D'après l'expression précédente, on constate que pour écrire la vraisemblance et chercher le maximum par rapport à γ , à b_0^- et b_0^+ , il faut être capable de comparer chacune des observations $\Delta y_t, 1 \leq t \leq T$ de l'échantillon aux seuils γb_0^+ et γb_0^- qui dépendent des paramètres inconnus. Par ailleurs la densité présente des discontinuités en γb_0^+ et γb_0^- .

La maximisation analytique de la vraisemblance paraît exclue.